M1 MEEF 2015-2016
Séquence 3

Les équations différentielles.
Classe présentielle. Exercice 8 à la minute 38.

Déterminer les solutions de $y_2'(t) = 3y_2(t) + 2t \quad (E)$.

Correction

Naturellement on commence par déterminer les solutions de l'équation homogène associée

$$(E_H) \qquad y_2'(t) = 3y_2(t).$$

Les solutions de (E_H) sont (c'est du cours)

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \text{tel que, } \forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_{2H}(t) = C\,\mathrm{e}^{3t}\,.$$

De plus on sait, par le théorème de Cauchy-Schwarz, que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 1 : l'ensemble des solutions de (E_H) (espace vectoriel de dimension 1) translaté d'une solution « particulière ».
Cherchons donc une solution particulière. Le second membre $2t$ étant polynomiale, on cherche une solution de type polynomial, notamment de degré 1. Soient a et b deux réels et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_{2p}(t) := at + b.$$

On cherche une solution de (E). On note que y_{2p} est $\mathscr{C}^\infty$ et donc notamment dérivable. De plus $y_2'(t) = a$ D'où,

$$\begin{aligned}
y_{2p} \text{ est une solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_2'(t) = 3y_2(t) + 2t,\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \qquad a = 3(at+b) + 2t,\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \qquad a = 3at + 3b + 2t,\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 = (3a+2)t + 3b - a,\\
&\Leftrightarrow 3a + 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 3b - a = 0,
\end{aligned}$$

car un polynôme est nul sur $\mathbb{R}$ (ou un intervalle ou encore en plus de point strictement que son degré) si et seulement s'il est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$y_{2p} \text{ est une solution de } (E) \Leftrightarrow a = -2/3 \qquad \text{et} \qquad b = a/3 = -2/9.$$

Finalement, $y_{2p}(t) = -2/3(t + 1/3)$ est une solution de (E) et l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \text{tel que, } \forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_2(t) = C\,\mathrm{e}^{3t} - \frac{2}{3}\left(t + \frac{1}{3}\right).$$

Note : dans la vidéo j'ai commencé à écrire n'importe quoi pour b, mais un auditeur attentif me reprenant, je corrige dans la suite mon erreur, et finalement je suis ici bien d'accord avec mon moi de la vidéo à la minute 41.